



ELSEVIER

International Journal of Thermal Sciences 41 (2002) 773–785

International
Journal of
Thermal
Sciences

www.elsevier.com/locate/ijts

Étude de l'affinité d'un panache turbulent évoluant en milieu stratifié

Investigation of the self-similarity of a turbulent plume evolving in a stratified medium

Leïla Dehmani^{a,*}, Mohamed Maalej^b

^a Laboratoire des Transferts Thermiques, Département de Physique, Faculté des Sciences de Tunis, Le Belvédère 1060, Tunis, Tunisie

^b Laboratoire des Applications Solaires-INRST, BP 95 Hammam-Lif, Tunisie

Reçu le 14 décembre 2000; accepté le 13 septembre 2001

Résumé

Ce travail concerne une étude analytique et numérique de l'affinité des panaches turbulents évoluant en milieu stratifié. L'étude analytique permet de dégager les conditions d'affinité de l'écoulement. Les lois obtenues sont valables aussi bien pour le cas d'un panache thermique constitué par de l'air chaud que pour un panache de gaz léger et elles sont vérifiées expérimentalement dans le cas d'un panache d'hélium. L'évolution axiale de la vitesse et de la concentration moyennes n'obéit plus aux lois classiques, mais à de nouvelles lois affines dépendant de la stratification du milieu ambiant. L'affinité est également observée pour le champ fluctuant, surtout pour la composante verticale de la vitesse alors qu'elle est plus lentement atteinte par la composante radiale. Un modèle numérique simple est proposé pour la prédition des champs moyens. L'influence des différents coefficients du modèle sur l'évolution de l'écoulement est étudiée. Les résultats obtenus sont comparés aux mesures expérimentales disponibles, et une bonne concordance entre la théorie et l'expérience est observée. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Abstract

This paper concerns a numerical and analytical investigation of the self-similarity of the turbulent plumes evolving in a stratified medium. The analytical investigation allows us to bring out the self-similarity conditions of the flow. The laws obtained are as valid for the case of a plume of warm air as for light gas and are verified experimentally in the case of a helium plume. The axial evolution of the mean velocity and concentration does not follow the classical laws, but follows new self-similarity laws that depend on the stratification of the medium. The self-similarity is even observed for the turbulent field, especially for the vertical velocity component while it is reached more slowly by the radial component. A simple numerical model is proposed for the prediction of the mean fields. The influence of the different coefficients of the model on the progressing of the flow is investigated. The results we obtain are compared to the experimental data and good agreement between theory and experiments is observed. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : panache turbulent ; modèle numérique ; stratification ; affinité ; convection naturelle

Keywords: turbulent plume; numerical model; stratification; self-similarity; natural convection

1. Introduction

L'étude des panaches turbulents en atmosphère stratifiée revêt de l'importance tant sur le plan industriel et de l'environnement, que sur le plan fondamental où de tels

écoulements offrent d'intéressants modèles physiques de recherche. La décharge d'un jet chaud dans un milieu stratifié intervient dans de nombreux processus de stockage et de rejet de chaleur. Dans les lacs, les rivières et les étangs, on rencontre souvent une stratification stable, où la température diminue avec la profondeur. A l'échelle d'une ville, les risques de pollution atmosphérique sont fortement accrus dès l'apparition d'une stratification thermique. Il en est de même des rejets sous-marins d'eaux usées, où une stratification de masse volumique peut empêcher toute dispersion

* Correspondance et tirés à part.

Adresses e-mail : leila.dehmani@fst.rnu.tn (L. Dehmani), mohamed.maalej@inrst.rnrt.tn (M. Maalej).

Nomenclature

$a(X)$	fonction de X
a_t	diffusivité turbulente thermique $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$a(X)$	fonction de X
C	concentration massique $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$c(X)$	fonction de X
C_T	paramètre intervenant dans l'étude de la zone affine
C_s^*	coefficient lié à la stratification du milieu ambiant
c_1, c_2, c_3	constantes
D	diamètre de l'injecteur m
$d(X)$	fonction de X
D_t	coefficient de diffusion turbulente pour un gaz dans l'air $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Fr	nombre de Froude
g	accélération de la pesanteur $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Gr	nombre de Grashof
$h(\eta)$	profil universel de la température (ou concentration) moyenne adimensionnée
Ka	coefficient de proportionnalité
k_1	constante intervenant dans l'expression de la longueur de mélange ℓ_m
L_o	longueur de référence m
ℓ_m	longueur de mélange
n, p	constantes intervenant dans la théorie de l'affinité
Pr_t	nombre de Prandtl turbulent
r	coordonnée radiale m
Re	nombre de Reynolds
Ri	nombre de Richardson
Sc_t	nombre de Schmidt turbulent
T	température K
u	composante verticale de la vitesse $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
v	composante radiale de la vitesse $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
x	coordonnée axiale m
X	variable intervenant dans la théorie de l'affinité : $X = \hat{x} - \hat{x}_v = (x - x_v)/D$
x_v	origine virtuelle (négative) m
X_s	niveau correspondant au début de la stratification
Y	fraction massique = C/ρ
$y(\eta)$	fonction de courant universelle
<i>Lettres grecques</i>	
$\alpha(X)$	fonction de X
$\beta(X)$	fonction de X
β	coefficient d'expansion thermique K^{-1}
β'	variable adimensionnelle = $\frac{\rho - \rho_\infty}{\rho}(Y_{1\infty} - Y_1)^{-1}$
δ	longueur intervenant dans l'expression de ℓ_m m
η	variable dans la théorie de l'affinité = $\hat{r}/(\hat{x} - \hat{x}_v)$
ν_t	viscosité turbulente $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
ρ	masse volumique $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
τ	variable muette = T (ou C)
$\phi_1(\eta), \phi_2(\eta)$	fonctions universelles intervenant dans la définition des lois de similitude pour les tensions de Reynolds
<i>Indices inférieurs</i>	
axe	relatif à l'axe de symétrie
i	relatif aux conditions d'injection
m	relatif à un écoulement « massique »
max	valeur maximale
min	valeur minimale
s	relatif à la stratification
th	relatif à un écoulement « thermique »
X	dérivée par rapport à X
o	valeur de référence
∞	milieu ambiant
1	gaz léger (= hélium)
<i>Indices supérieurs</i>	
$\hat{}$	grandeur adimensionnelle
$\bar{}$	grandeur moyenne
$'$	fluctuation
o, oo	dérivée première (ou seconde) par rapport à η

de la pollution et entraîner des zones d'accumulation qui s'installent en nappes sous l'interface. L'apparition de ces phénomènes d'inversion et de blocage, contribue à porter les risques à grandes échelles loin de la source. De même lors d'un incendie de bâtiment, par exemple, les fumées produites par le foyer s'élèvent sous l'effet de la poussée d'Archimède et constituent également une région de faible masse volumique flottant au-dessus de l'air frais. L'interface entre ces deux régions est le siège d'un gradient très élevé de masse volumique, correspondant à une forte stratification qui altère considérablement les caractéristiques de la turbulence. De plus, l'entraînement de l'air par la flamme et le panache, tant au-dessus du foyer qu'au niveau de l'interface, joue un rôle primordial dans la propagation du feu, puisqu'il

conditionne les échanges de masse et détermine l'oxydation du combustible, et, de ce fait, la puissance calorifique mise en jeu au cours du sinistre.

Du point de vue théorique et expérimental, l'étude des panaches évoluant en milieu stratifié a bénéficié des travaux effectués sur les jets chauds et les panaches évoluant en milieu homogène qui ont commencé vers le début des années 1940. L'étude des phénomènes d'entraînement et de mélange générés par les panaches, a débuté vers la fin des années 1950, par les travaux de Morton et al. [1] qui constituent aujourd'hui encore une référence intéressante, malgré les perfectionnements récents des techniques de mesure. Cette étude qui reste d'actualité a été poursuivie, entre autres, par Baines [2,3], Rocket [4], List [5], puis par Cardoso et

Woods [6], Breidenthal [7], Makhviladze et al. [8], Linden et Cooper [9]; Souvent les auteurs déterminent un coefficient d'entraînement constant qui peut être par la suite utilisé dans un modèle intégral. Les effets de flottabilité inverse provoqués par un panache ou un jet chaud ascendant dont la température est inférieure au milieu stratifié, ont d'abord été analysés par Morton [10] et Turner [11]. Cette analyse a été reprise très récemment par de nombreux auteurs dont nous pouvons citer Kapoor et Jaluria [12] Bloomfield et Kerr [13,14], et Lin et Armfield [15]. Contrairement au cas des panaches laminaires évoluant en milieu stratifié [16–20], l'étude des panaches turbulents est beaucoup plus complexe à cause de la présence d'échelles caractéristiques multiples. Par conséquent, leur modélisation est encore récente et les études correspondantes sont plutôt rares. Elle constitue généralement une extension des modèles de jets turbulents utilisés en milieu homogène auxquels on ajoute des termes pour traduire les effets de gravitation. L'écoulement peut être décrit à l'aide de modèles à deux équations de transport du type « $k-\varepsilon$ » ou « $k-\varepsilon-g$ » [21–23] ou bien, à l'aide de modèles du second ordre [24–26], cependant, cette modélisation reste délicate et nécessite un temps de calcul assez long.

L'analyse détaillée de l'affinité des panaches turbulents a été uniquement effectuée, en milieu homogène [27–30]. Vu le manque de données concernant le cas d'un milieu stratifié, on se propose par conséquent de poursuivre ce travail. Dans cette publication, on effectue d'abord une étude analytique de l'affinité des panaches turbulents évoluant en milieu stratifié. Par la suite, on propose un modèle numérique simple et pratique ne nécessitant que peu de temps de calcul. Après la mise en équations du problème, on teste l'influence des différents paramètres du modèle. Cette étude est valable quelle que soit la nature de l'écoulement, d'origine thermique (panache d'air chaud) ou massique (panache d'hélium). Enfin, les résultats du modèle sont comparés à ceux obtenus pour trois configurations expérimentales étudiées où l'on avait fait varier les forces de flottabilité de l'écoulement ainsi que l'intensité de la stratification.

2. Étude analytique de la zone affine

A partir des équations régissant l'écoulement, on déduit les lois auxquelles doivent obéir les différents paramètres de façon à obtenir l'affinité des panaches turbulents évoluant en milieu stratifié. Étant donné que l'on s'intéresse particulièrement aux champs moyens de l'écoulement, on utilise donc des hypothèses de fermeture simples qui ont déjà donné de bons résultats dans le cas de panaches évoluant en milieu homogène.

2.1. Équations régissant l'écoulement

La recherche des solutions affines concerne essentiellement la région où les profils ne dépendent plus de la forme géométrique de la source et où les tensions de Reynolds et le flux de chaleur turbulent prédominent. On estime que dans cette zone, la variation de la masse volumique reste faible et la pression est hydrostatique. Il a été montré expérimentalement qu'un tel régime d'écoulement existe dans le cas des panaches thermiques et que l'approximation de Boussinesq peut être appliquée [31]. Par ailleurs, le même système d'équations est valable dans le cas d'un panache thermique constitué d'air chaud (voir Fig. 1) ou d'un panache massique constitué de gaz léger (un panache d'hélium par exemple). Il s'écrit dans ces conditions :

$$\frac{\partial \hat{r} \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{r} \hat{v}}{\partial \hat{r}} = 0 \quad (1)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} = \hat{\tau} - \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \overline{u'v'}) \quad (2)$$

$$\hat{u} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \hat{r}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{\tau}_s}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (-\hat{r} \overline{\hat{\tau}'v'}) \quad (3)$$

avec :

$$\tau = T \quad (\text{ou } C)$$

Pour le panache «thermique» :

$$\hat{T} = \frac{T - T_\infty}{T_{\max} - T_{\infty_0}}, \quad \hat{T}_s = \frac{T_\infty}{T_{\max} - T_{\infty_0}}$$

Pour le panache «massique» :

$$\hat{C} = \frac{C_1 - C_{1\infty}}{C_{1i} - C_{1\infty_0}}, \quad \hat{C}_s = \frac{C_{1\infty}}{C_{1i} - C_{1\infty_0}}$$

Les solutions sont des profils universels pour les panaches turbulents. Le choix des grandeurs de référence s'effectue parmi les paramètres caractéristiques de l'écoulement étudié. Ainsi, la longueur de référence représente ici le diamètre de la source et les vitesses de référence u_{0th} et u_{0m} , se rapportant respectivement au panache thermique et au panache massique, sont définies en fonction des écarts de températures caractéristiques ou de fractions massiques, tels que :

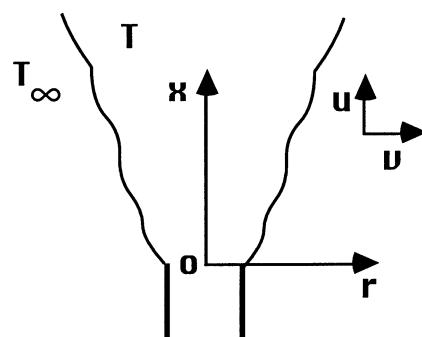


Fig. 1. Panache thermique.

Fig. 1. Thermal plume.

$$\begin{aligned} u_{\text{oth}} &= (\beta \Delta T_0 g L_{\text{oth}})^{1/2}, \quad \text{avec } \Delta T_0 = T_{\max} - T_{\infty 0}, \\ u_{\text{om}} &= (\beta' \Delta Y_{10} g L_{\text{om}})^{1/2}, \quad \text{avec } \Delta Y_{10} = Y_{1i} - Y_{1\infty 0} \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$Re_{\text{oth}} = (Gr_{\text{oth}})^{1/2} \quad \text{et} \quad Re_{\text{om}} = (Gr_{\text{om}})^{1/2}$$

d'où :

$$Fr_{\text{oth}} = Fr_{\text{om}} = 1$$

Les propriétés physiques du fluide sont, quant à elles, adimensionnées par leur valeur à l'infini ($r \rightarrow \infty$) au niveau $x = 0$.

Pour le panache «thermique», la température de référence T_{\max} , correspond à la température maximale de l'écoulement et pour le panache «massique», C_{1i} correspond à la concentration du gaz léger injecté.

Le système précédent doit satisfaire aux conditions aux limites suivantes :

$$^*\text{en } \hat{r} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{r}} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \hat{r}} = 0 \quad (4)$$

Ces conditions traduisent la symétrie axiale de l'écoulement et sont valables pour un milieu stratifié avec $\tau_{\infty} < \tau_{\text{axe}}$.

$$^*\text{quand } \hat{r} \rightarrow \infty: \quad \bar{u} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \bar{u}' \rightarrow 0 \quad (5)$$

2.2. Recherche de solutions affines et fermeture des équations

L'obtention des solutions affines [32] repose d'une part, sur la recherche de nouvelles variables (X, η) , qui permettraient la décomposition en produits de fonctions à variable unique des diverses grandeurs caractéristiques, et d'autre part, sur l'existence d'une origine virtuelle x_v . Cette transformation permet la réduction des équations aux dérivées partielles précédentes en équations différentielles simples.

Le changement de variables est défini par :

$$(\hat{x}, \hat{r}) \rightarrow X = \hat{x} - \hat{x}_v, \quad \eta = \hat{r} \cdot c(X)$$

et le passage des dérivées partielles suivant \hat{x} ou \hat{r} , aux dérivées partielles suivant X ou η est donné par les relations de Von-Mises :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\)_r &= \frac{\partial}{\partial X} (\)_{\eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\)_X \cdot \eta \cdot \frac{c_X}{c} \\ \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\)_x &= \frac{\partial}{\partial \eta} (\)_X \cdot c \end{aligned}$$

Les hypothèses d'affinité sur les grandeurs physiques se traduisent par les égalités suivantes :

$$\bar{\tau} = a(X) \cdot h(\eta) \quad \text{où} \quad h(\eta) = \bar{\tau}/\bar{\tau}_{\text{axe}} \quad (6)$$

$$\psi = d(X) \cdot y(\eta)$$

où ψ est solution de l'équation de continuité

$$\bar{u} = \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{r}} = (c^2 d) y^0 / \eta$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{x}} = -(cd_x y / \eta + c_x dy^0) \quad (8)$$

$$-\bar{u}' \bar{v}' = \alpha(X) \phi_1(\eta), \quad -\bar{v}' \bar{\tau}' = \beta(X) \phi_2(\eta) \quad (9)$$

Pour que les équations (2) et (3) puissent se transformer en un système différentiel simple, c'est-à-dire ne dépendant que de la variable η , il faut que les fonctions de X obéissent aux lois suivantes :

$$\begin{aligned} a(X) &= c_3 X^{(4n+2-p)/p}, & c(X) &= c_1 X^{n/p}, \\ d(X) &= c_2 X^{1/p} \end{aligned}$$

où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes.

α, β et $d\bar{\tau}_s/dX$ doivent être respectivement proportionnels à $X^{(3n+2-p)/p}, X^{(5n+3-2p)/p}$ et $X^{(4n+2-2p)/p}$.

On remarque que pour obtenir des solutions affines dans le cas d'un panache évoluant en milieu stratifié, la variation de la stratification $\bar{\tau}_s$ suivant l'altitude doit avoir la même forme que $a(X)$ (voir Section 3.2).

Les exposants inconnus n et p , sont déterminés par intégration de l'équation de l'énergie (3) et par la fermeture des corrélations $\bar{u}' \bar{v}'$ et $\bar{v}' \bar{\tau}'$.

La fermeture du problème posé est basée sur le concept de viscosité et de diffusivité turbulentes. On adopte ici l'hypothèse simple de Prandtl-Reichard [33], étant donné qu'elle a déjà donné de bons résultats concernant les champs moyens d'un panache pur [31] et a nécessité un temps de calcul très court. De plus, celle-ci permet de retrouver les lois classiques de décroissance de la vitesse et de la température axiales dans le cas d'un milieu homogène comme on va le montrer par la suite. On obtient donc :

$$-\bar{u}' \bar{v}' = \bar{v}_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{r}} = \ell_m \bar{u}(0) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{r}} \quad (10)$$

$$-\bar{v}' \bar{\tau}' = \bar{a}_t \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \hat{r}} = \frac{\ell_m \bar{u}(0)}{Pr_t} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \hat{r}} \quad (11)$$

(pour le panache «massique» il faut remplacer \bar{a}_t par \bar{D}_t et Pr_t par Sc_t) avec :

$$\ell_m = K a c^{-1} = \frac{K a}{c} \quad (12)$$

La longueur de mélange ℓ_m est choisie comme une fraction $K a$ de la demi-épaisseur du panache correspondant à la valeur 1 pour la variable η .

D'après les relations (10) et (11), on déduit que :

$$n = -p \quad (13)$$

A partir des conditions précédentes, les équations (2) et (3) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^0}{\eta} \right)^{oo} &= -\frac{C_T}{c_1} \left(\frac{2n+1}{n} \right) \\ &\times \left[\left(\frac{y^0}{\eta} \right)^2 - \left(\frac{1}{2n+1} \right) \eta \left(\frac{y^0}{\eta} \right)^0 \right. \\ &\left. + \left(\frac{n}{2n+1} \right) \frac{c_3}{c_1^4 c_2^2} h \right] - \frac{1}{\eta} \left(\frac{y^0}{\eta} \right)^0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} h^{oo} &= -\left(\frac{5n+2}{n} \right) \frac{Pr_t C_T}{c_1} \\ &\times \left[y^0 \frac{h}{\eta} - \left(\frac{1}{5n+2} \right) \frac{y h^0}{\eta} + \frac{C_s^* y^0}{\eta} \right] - \frac{h^0}{\eta} \end{aligned} \quad (15)$$

avec :

$$c_1 = 1 \text{ de façon à avoir : } \eta = \frac{\hat{r}}{X} \quad (16)$$

$$C_s^* = \frac{1}{\alpha X} \frac{d\hat{\tau}_s}{dX} \text{ coefficient relatif à la stratification.} \quad (17)$$

Ces équations différentielles doivent satisfaire aux conditions aux limites (4), (5) qui prennent alors la forme suivante :

$$\text{en } \eta = 0: \quad y(0) = y^0(0) = 1 - h(0) = h^0(0) = 0 \quad (18)$$

$$\text{quand } \eta \rightarrow \infty: \quad y^0/\eta \rightarrow 0 \quad (19)$$

La vitesse verticale est alors proportionnelle à $X^{-(2n+1)/n}$ et la température est proportionnelle à $X^{-(5n+2)/n}$. Le débit massique m à travers une section du panache ($m = \int_0^\infty 2\pi \bar{\rho} u r dr$) est proportionnel à $X^{-1/n}$, celui-ci augmente donc avec X si n est négatif.

Dans le cas particulier d'un milieu homogène $C_s^* = 0$ et $n = -3/5$, la vitesse verticale est alors proportionnelle à $X^{-(1/3)}$, la température est proportionnelle à $X^{-(5/3)}$, le débit massique à travers une section du panache est proportionnel à $X^{5/3}$ et croît avec l'altitude.

3. Résultats expérimentaux

On étudie ici l'affinité des champs moyens et fluctuants à partir de données expérimentales pour mieux comprendre les phénomènes dus à l'interaction entre l'écoulement et le milieu stratifié et vérifier la validité des équations analytiques.

3.1. Installation expérimentale

Les mesures ont été effectuées sur un jet à faible densité et à faible vitesse initiale, constitué d'un mélange d'hélium et d'air évoluant en milieu stratifié [34,35]. L'injecteur cylindrique, de diamètre $D = 0,053$ m est placé à l'intérieur d'une cabine de dimensions importantes (2 m de hauteur sur $1,2 \times 1,2$ m² de section), permettant d'assurer une bonne indépendance de l'écoulement vis à vis des perturbations extérieures (Fig. 2).

Le panache vertical est progressivement contrarié dans sa convection par une boîte de stratification qui se trouve à environ deux diamètres de la source. Cette dernière est alimentée par l'écoulement et contient le mélange « hélium + air entraîné » ; un volume équivalent à celui du mélange entrant déborde de la cavité par effet déversoir et est évacué par le haut de la cabine. Il en résulte la mise en place de trois zones stables dans l'environnement : la zone proche de la source où le panache évolue dans un environnement à masse volumique constante proche de celle de l'air ambiant. Au-dessus à environ deux diamètres de l'injecteur, se situe une zone à masse volumique constante alimentée par un mélange d'hélium et d'air entraîné, de proportions

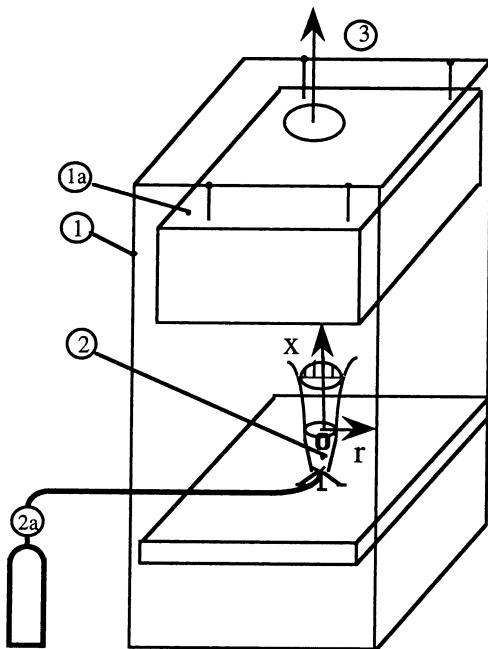


Fig. 2. Dispositif expérimental. 1—cabine, 1a—cavité, 2—injecteur, 2a—bouteille d'hélium, 3—évacuation du mélange air-hélium.

Fig. 2. Experimental set up. 1—cabin, 1a—stratification box, 2—nozzle-tube, 2a—helium reservoir, 3—air-helium mixture vent.

Tableau 1

Table 1

Configuration	u_i (m·s ⁻¹)	Fr_i	Ri_i	Re_i	$\frac{\rho_\infty \text{max}}{\rho_\infty \text{min}}$
(A)	0,06	$1,16 \cdot 10^{-3}$	29,40	27,31	0,93
(B)	0,19	$10,54 \cdot 10^{-3}$	9,74	82,43	0,81
(C)	0,45	$63,12 \cdot 10^{-3}$	3,98	201,71	0,64

variables selon la configuration étudiée. Entre les deux zones décrites précédemment, auxquelles correspond une répartition homogène, mais de densité différente, on peut localiser une troisième zone stratifiée où la masse volumique subit un fort gradient stable.

Trois configurations de panache massique ont été étudiées expérimentalement : une configuration notée (A) se rapportant à un écoulement à très forte flottabilité similaire à un panache pur (faible quantité de mouvement initiale), une configuration (C) à forte quantité de mouvement initiale pour mieux cerner l'effet des forces d'inertie, enfin une configuration intermédiaire (B) possédant à la fois une forte contribution de la poussée d'Archimède et des forces d'inertie.

Les caractéristiques des conditions initiales de l'écoulement pour chaque configuration sont représentées dans le Tableau 1.

Les mesures de concentration sont effectuées par prélèvement continu et calculées à partir du signal électrique fourni par une sonde au zirconium, qui détermine la concentration en oxygène du mélange hélium-air sur une plage allant de 100 % jusqu'aux traces. Le champ dynamique est déterminé par Anémométrie Laser à effet Doppler à deux composantes,

l'écoulement et le milieu ambiant étant ensemencés à l'aide de gouttelettes microscopiques d'huile de tournesol. L'erreur ainsi commise est inférieure à 10% pour les vitesses ne dépassant pas $0,10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et de 1% pour les plus fortes vitesses.

Dans cette étude, on s'intéresse particulièrement à la zone stratifiée qui existe pour les trois configurations citées ci-dessus.

3.2. Analyse des résultats expérimentaux

Dans nos travaux antérieurs [36], nous avons vu que malgré la stratification, les profils radiaux obéissent à des lois de similitude de type Gaussien, mettant en évidence l'existence de l'affinité concernant surtout le champ moyen de l'écoulement.

Pour mieux comprendre ce phénomène, nous avons repris les valeurs expérimentales sur l'axe de l'écoulement et nous les avons tracées en coordonnées logarithmiques.

Pour chaque configuration étudiée, l'origine virtuelle du panache x_v est obtenue à l'aide des profils de la composante verticale de la vitesse moyenne.

On note également que pour les panaches, les lois de similitude peuvent être atteintes très près de la source, pour $X = 2$ [31,37], contrairement aux jets où cette zone se situe plutôt vers $X = 20$.

On voit bien que dans la zone affine, la variation de la vitesse axiale u peut être représentée par une droite (Fig. 3) conformément à l'étude analytique. Contrairement au cas du panache pur évoluant en milieu homogène, on n'observe plus une décroissance en $X^{-1/3}$, mais une décroissance plus forte, en $X^{-(2n+1)/n}$ qui varie selon la configuration étudiée et dépend de la stratification du milieu ambiant. Sachant que la vitesse axiale décroît en $X^{-(2n+1)/n}$, les valeurs du coefficient n , ont pu être déterminées pour chaque configuration (Tableau 2). On remarque par ailleurs, que les pentes ($-0,87$; $-0,88$; $-0,95$) varient peu d'une configuration à l'autre (Fig. 3). A ce stade, le nombre insuffisant de données, ne permet pas une investigation plus approfondie, reliant cette variation aux nombres caractéristiques de chaque configuration tels que le nombre de Reynolds ou de Grashof. Pour le moment, les trois configurations pourraient être décrites globalement par une pente de référence, égale à « $-0,9$ », un plus grand nombre d'essais étant nécessaire afin d'élucider l'influence de la configuration.

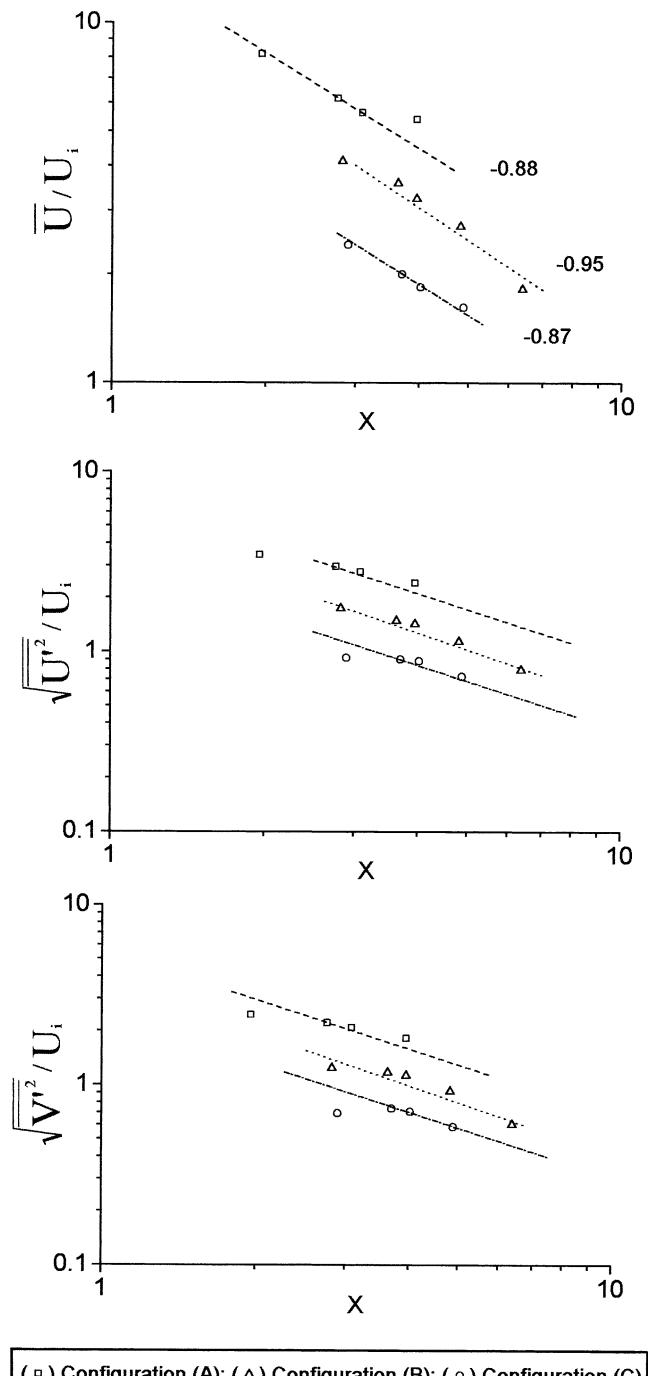
Les écarts types des fluctuations de la composante verticale de la vitesse ainsi que ceux de la composante horizontale (Fig. 3) suivent également bien la loi affine en $X^{-(2n+1)/n}$, mais cette affinité débute un peu plus loin que celle du champ moyen.

Les variations de l'écart de concentration moyenne axiale en fonction de la côte X , représentées en échelle logarithmique sur la Fig. 4, montrent que dans la zone stratifiée $C_{1\text{axe}} - C_{1\infty}$ est proportionnel à $X^{-(5n+2)/n}$ (Tableau 2). Comme précédemment, cette décroissance de la concentration dépend de la stratification du milieu ambiant et est plus forte que pour le cas du panache pur évoluant

Tableau 2

Table 2

Configuration	n	$(2n+1)/n$	$(5n+2)/n$
(A)	-0,89	0,88	2,75
(B)	-0,95	0,95	2,89
(C)	-0,88	0,87	2,73



(□) Configuration (A); (△) Configuration (B); (○) Configuration (C)

Fig. 3. Variation axiale de la vitesse et de ses écarts types.

Fig. 3. Axial variation of the velocity and its standard deviations.

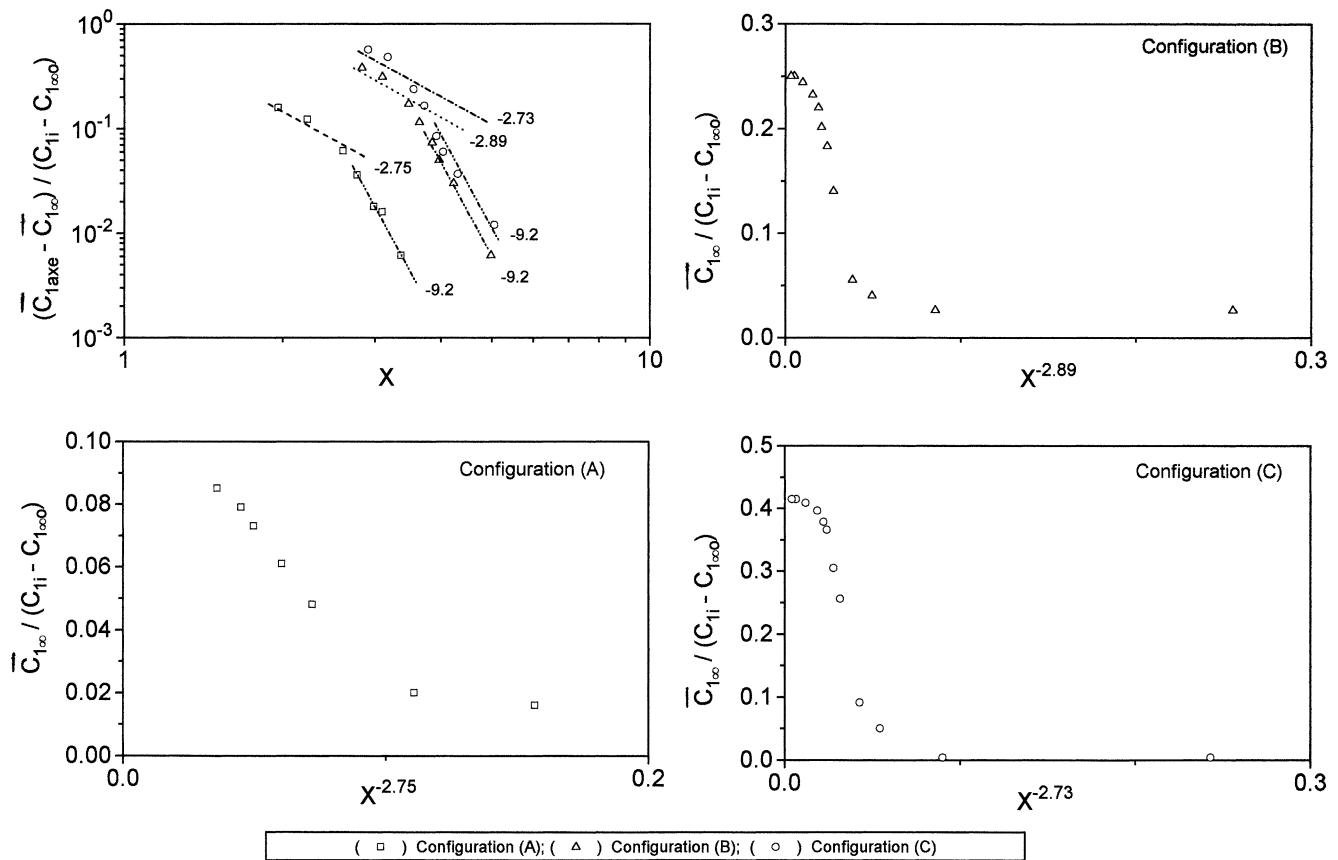


Fig. 4. Variation verticale de la concentration sur l'axe et dans le milieu ambiant.

Fig. 4. Vertical variation of the concentration on the axis and in the ambient medium.

en milieu homogène. On voit donc que les valeurs de n trouvées précédemment pour les profils de vitesses conviennent bien aux variations axiales de la concentration. Par la suite, l'écoulement évolue dans un milieu ambiant pratiquement homogène, à faible masse volumique. La différence de concentration entre l'axe et le milieu ambiant est alors très faible et l'écoulement est essentiellement gouverné par les forces inertielles. Dans cette dernière région, la variation de la concentration peut être approximativement décrite par la même droite pour les trois configurations étudiées ; $\overline{C}_{1\text{axe}} - \overline{C}_{1\infty}$ est alors proportionnelle à $X^{-9.2}$.

Pour chaque configuration, les variations de la concentration en hélium du milieu ambiant en fonction de $X^{-(5n+2)/n}$ sont également représentées sur la Fig. 4. On obtient deux paliers représentant les zones où la concentration est presque constante, entre celles-ci, il existe une zone de forte variation de la concentration correspondant à la stratification du milieu ambiant. Dans cette dernière, la variation de $\overline{C}_{1\infty}$ en fonction de $X^{-(5n+2)/n}$ est linéaire conformément aux conditions d'affinité.

Étant donné que le milieu ambiant n'est pas partout stratifié, un coefficient C_s^* a été calculé au niveau $x/D = 2,06$, à partir de la moyenne pondérée, tel que :

$$C_s^*(\text{pondéré}) = \frac{(X - X_s)}{X} \frac{1}{a_X} \frac{d\bar{\tau}_s}{dX}$$

Ce coefficient est égal à $-0,23$ pour la configuration (A) et $-0,24$ pour la configuration (C). Pour la configuration intermédiaire, $C_s^* = -0,21$.

4. Modélisation et résultats numériques

Dans ce paragraphe, les évolutions relatives aux vitesses verticales et radiales ainsi qu'aux températures (ou concentrations) moyennes sont déduites du modèle établi dans le cadre de la théorie affine, elles permettent d'obtenir des profils universels pour les panaches turbulents. L'influence des différents coefficients et nombres adimensionnels sur l'évolution des profils thermiques et dynamiques est étudiée dans le cas d'un milieu stratifié.

4.1. Modélisation

Pour résoudre le système constitué par les équations (14) et (15), on a utilisé une méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre 4. La valeur de $y^{00}(0)$ n'est pas connue de manière précise. Elle est estimée puis corrigée jusqu'à ce que la vitesse verticale tende vers zéro en dehors de l'écoulement [38]. On a également vérifié que toutes les conditions aux limites sont satisfaites.

Le système à résoudre est mis sous la forme d'une équation différentielle vectorielle :

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\eta} = \mathbf{F}(\mathbf{W}, \eta)$$

$$\mathbf{W}(0) = \mathbf{W}_0$$

où \mathbf{W} est un vecteur dont les composantes sont les solutions du problème :

$$W_1 = y, \quad W_2 = \frac{y^0}{\eta}, \quad W_3 = \left(\frac{y^0}{\eta} \right)^0$$

$$W_4 = h, \quad W_5 = h^0$$

\mathbf{W}_0 représente les conditions initiales en $\eta = 0$.

Les champs thermiques (ou de concentration) et dynamiques prennent alors la forme suivante :

$$\frac{\bar{\tau}}{\hat{\tau}_{\text{axe}}} = W_4, \quad \frac{\bar{u}}{\hat{u}_{\text{axe}}} = \frac{W_2}{y^{00}(0)} \quad \text{et}$$

$$\frac{\bar{v}}{\hat{u}_{\text{axe}}} = \frac{1}{c_1 y^{00}(0)} \left(\frac{W_1}{n\eta} + W_2\eta \right)$$

4.2. Résultats numériques

Les courbes de la Fig. 5 tracées pour $n = -0,75$ et $C_s^* = -0,5$, montrent qu'une augmentation du nombre de Prandtl turbulent s'accompagne d'une diminution de la température près du cœur de l'écoulement, alors que les deux composantes de la vitesse ne varient pas. Par ailleurs, des tests faits en milieu homogène ont montré que l'augmentation de « Pr_t » s'accompagne d'une forte diminution de la température, alors que la vitesse verticale ne diminue que légèrement ainsi que l'entraînement de l'air ambiant. L'augmentation de la constante Ka , qui correspond physiquement à une augmentation de la longueur de mélange, se traduit par un élargissement appréciable des profils thermiques et dynamiques près du cœur de l'écoulement. La vitesse radiale augmente alors près de l'axe et l'écoulement est plus écrasé.

Les profils de la Fig. 6, ont été calculés pour $Ka = 0,007$ et $Pr_t = 0,75$ avec le coefficient « C_s^* » négatif, $-1 < C_s^* < 0$ de façon à satisfaire aux conditions aux limites. Ces derniers montrent qu'une variation du coefficient C_s^* n'a pratiquement pas d'influence sur les profils dynamiques alors qu'elle provoque une forte variation des profils thermiques. Une diminution de $|C_s^*|$ crée une forte diminution de l'écart de température et les profils deviennent plus effilés. Ce phénomène est physiquement cohérent, si la valeur absolue de C_s^* diminue, ceci peut être dû soit à l'augmentation de l'écart de température entre l'axe et le milieu ambiant, soit à une diminution de la variation de température du milieu ambiant avec l'altitude, dans les deux cas, on obtient une évolution plus aisée du panache et par conséquent des profils moins aplatis. Pour un milieu stratifié, les profils thermiques passent généralement par un minimum (qui peut même atteindre des valeurs négatives) puis augmentent pour tendre par la suite vers une asymptote horizontale.

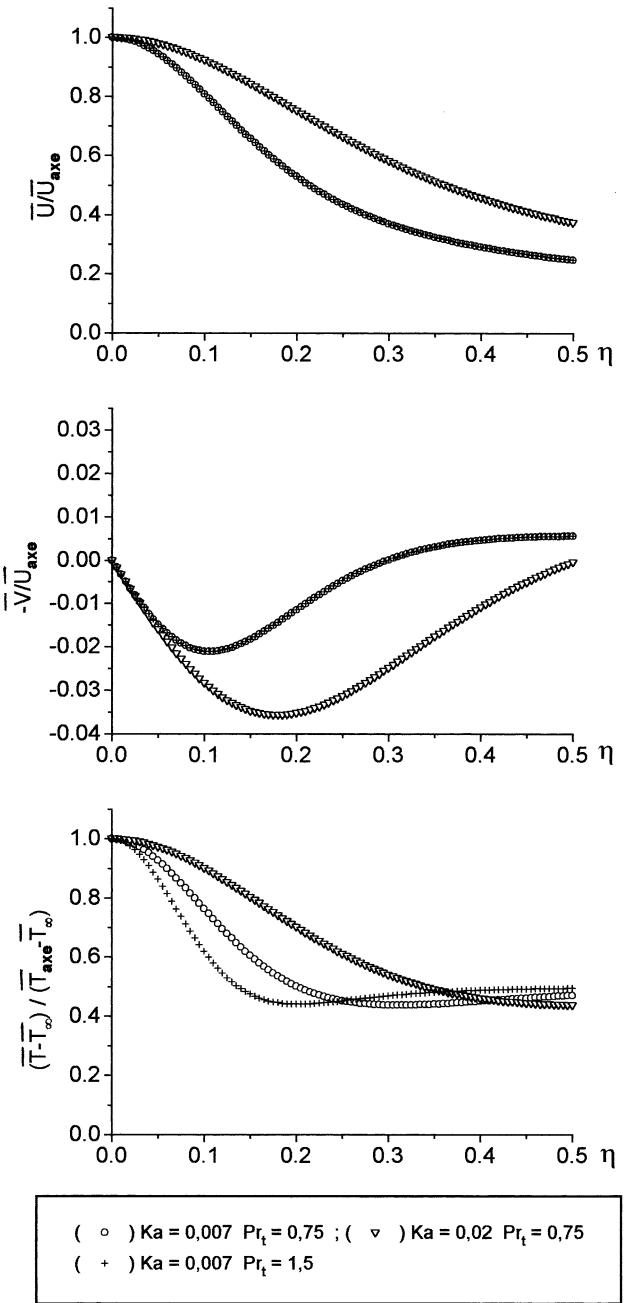


Fig. 5. Effet de la variation du coefficient Ka et du nombre de Prandtl turbulent sur les profils de la vitesse et de l'écart de température.

Fig. 5. Influence of the variation of the coefficient Ka and of the turbulent Prandtl number on the velocity and temperature excess profiles.

Cette asymptote n'est pas toujours nulle comme dans le cas d'un milieu homogène et sa valeur augmente dans le cas d'un milieu fortement stratifié à cause du fort écrasement de l'écoulement à l'encontre de la stratification.

Dans cette étude, la constante n est telle que : $-1 \leq n < -0,5$, ce choix permet d'avoir à la fois une décroissance de la vitesse et de la température sur l'axe ainsi qu'une bonne convergence des résultats à l'infini. On remarque qu'une diminution de la valeur absolue de n , provoque une forte augmentation de la vitesse verticale et une faible

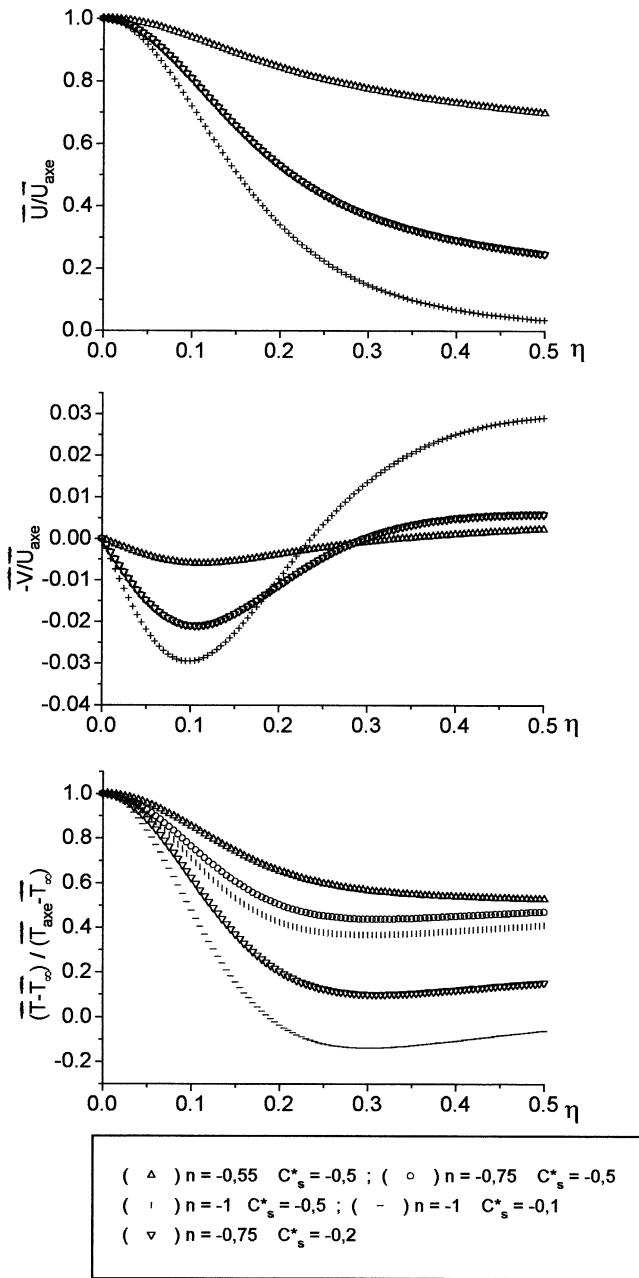


Fig. 6. Effet de la variation de la constante n et du coefficient C_s^* sur les profils de la vitesse et de l'écart de température.

Fig. 6. Influence of the variation of the constant n and the coefficient C_s^* on the velocity and temperature excess profiles.

augmentation de l'écart de température. Cette constatation est bien en accord avec l'augmentation du débit massique à travers une section du panache (m est proportionnel à $X^{-1/n}$).

La courbe calculée pour $n = -1$ et $C_s^* = -0,1$ (Fig. 6), représente un cas intéressant pour le profil thermique où on observe un minimum négatif loin de l'axe. Physiquement, ceci a lieu lorsque la croissance de la température ambiante suivant X est suffisamment forte de façon que sur les bords du panache, le fluide entraîné provenant du bas a une

température inférieure à la température ambiante locale. Ce phénomène a également été observé par Jaluria [19,38] dans le cas de la modélisation numérique d'un panache laminaire évoluant dans un milieu linéairement stratifié, à stratification thermique stable. Là aussi, le minimum négatif n'a été observé que pour les profils thermiques, la vitesse verticale restant toujours positive. D'après la Fig. 6, on remarque également que si la valeur absolue de n diminue, la norme de la vitesse horizontale diminue et devient négligeable, sur les bords de l'écoulement, l'aspiration de l'air ambiant tend vers zéro. On remarque par ailleurs que lorsque n passe de la valeur $-0,55$ à -1 , le rapport $-v/u_{\text{axe}}$ en $\eta = 0,1$ est pratiquement multiplié par six.

5. Confrontation des résultats numériques et expérimentaux

Pour tester le modèle, on effectue d'abord une comparaison avec des mesures réalisées en milieu homogène. On considère que la constante Ka est proportionnelle à la demi-épaisseur du panache « δ_{inf} » définie par le point d'inflexion du profil radial de la composante verticale de la vitesse moyenne tel que :

$$Ka = \frac{\ell_m}{X} = k_1 \frac{\delta_{\text{inf}}}{X}$$

avec $(\partial^2 \hat{u} / \partial \hat{r}^2)(\delta_{\text{inf}}) = 0$ et $k_1 = 0,035$

Cette méthode a déjà donné de bons résultats dans le cas des panaches purs évoluant en milieu homogène [31]. On remarque par ailleurs que dans le cas des jets ronds [31,39], « δ » est choisie au point où $\hat{u}(\delta) / \hat{u}_{\text{axe}} = 10^{-2}$ (dans ce cas, $k_1 = 0,075$), on a également vérifié que ces deux définitions aboutissent au même résultat.

Les calculs ont été effectués en prenant $Pr_f = 0,75$, valeur adoptée par de nombreux chercheurs dans le cas des écoulements libres [28,40]. Les résultats obtenus (Fig. 7) ont été comparés aux mesures de Shabbir et George [41], réalisées sur un panache obtenu par injection d'air chaud à 292°C dans un milieu ambiant homogène ; une bonne concordance entre la théorie et l'expérience a été observée.

Par la suite, le calcul a été effectué dans le cas d'un milieu stratifié et les résultats obtenus ont été comparés à nos mesures qui, à notre connaissance, peuvent être considérées comme les premières contributions expérimentales pour ce genre d'écoulement.

Les profils de la vitesse verticale observés dans le cas des différentes configurations d'écoulement (Section 3.1), montrent que d'une façon générale, une assez bonne concordance entre la théorie et l'expérience a été obtenue (Fig. 8).

Les variations radiales de la vitesse horizontale ont été représentées sur la Fig. 9. Une vue générale montre que cette vitesse est d'abord positive près de l'axe correspondant à un écrasement de l'écoulement, puis devient négative, mettant en relief le phénomène d'entraînement. Le phénomène de similitude est le mieux observé pour la configuration (C).

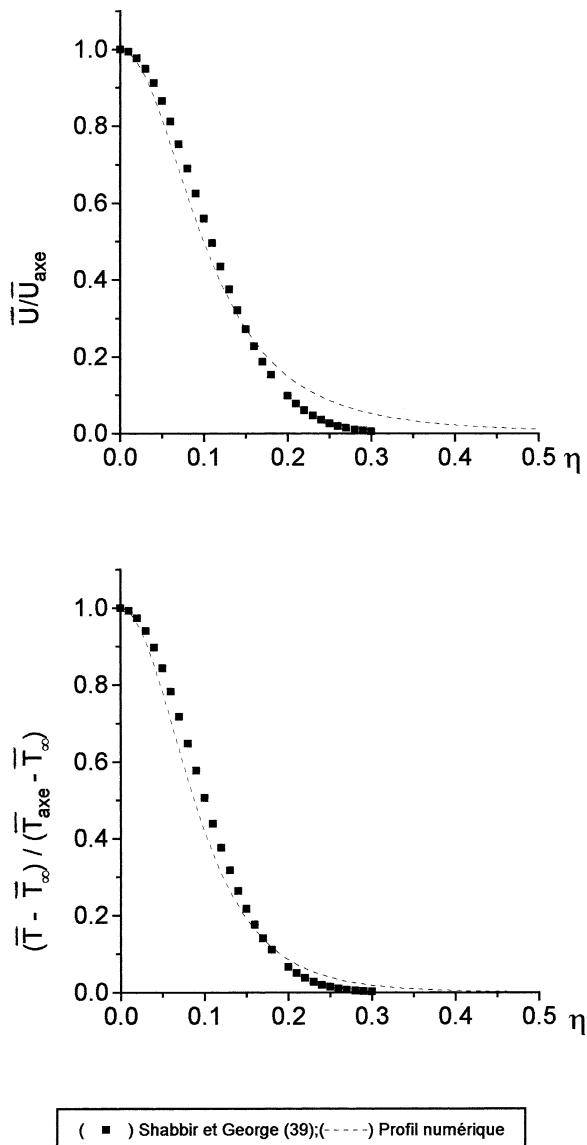


Fig. 7. Températures et vitesses adimensionnelles moyennes—milieu homogène.

Fig. 7. Dimensionless mean temperatures and velocities—homogeneous medium.

Cette dernière est la moins perturbée, puisqu'elle correspond au débit le plus fort qui donne lieu à une vitesse radiale plus forte ainsi qu'une meilleure symétrie des profils. Du point de vue global, on voit que les profils numériques ont la même allure que les courbes expérimentales, mais l'amplitude du phénomène est sous-estimée. Dans l'expérience, la vitesse radiale est plus forte, montrant un plus fort écrasement de l'écoulement. Ceci pourrait être dû à l'hypothèse utilisée dans le modèle, qui suppose l'existence d'une stratification dans tout le milieu ambiant, alors qu'en réalité, l'écoulement rencontre une forte stratification sur une petite zone, ce qui provoque une plus forte collision entre l'écoulement et le milieu ambiant donnant lieu à une plus forte vitesse radiale.

La Fig. 10 montre les variations de la concentration pour les trois débits étudiés. On s'est limité ici au niveau

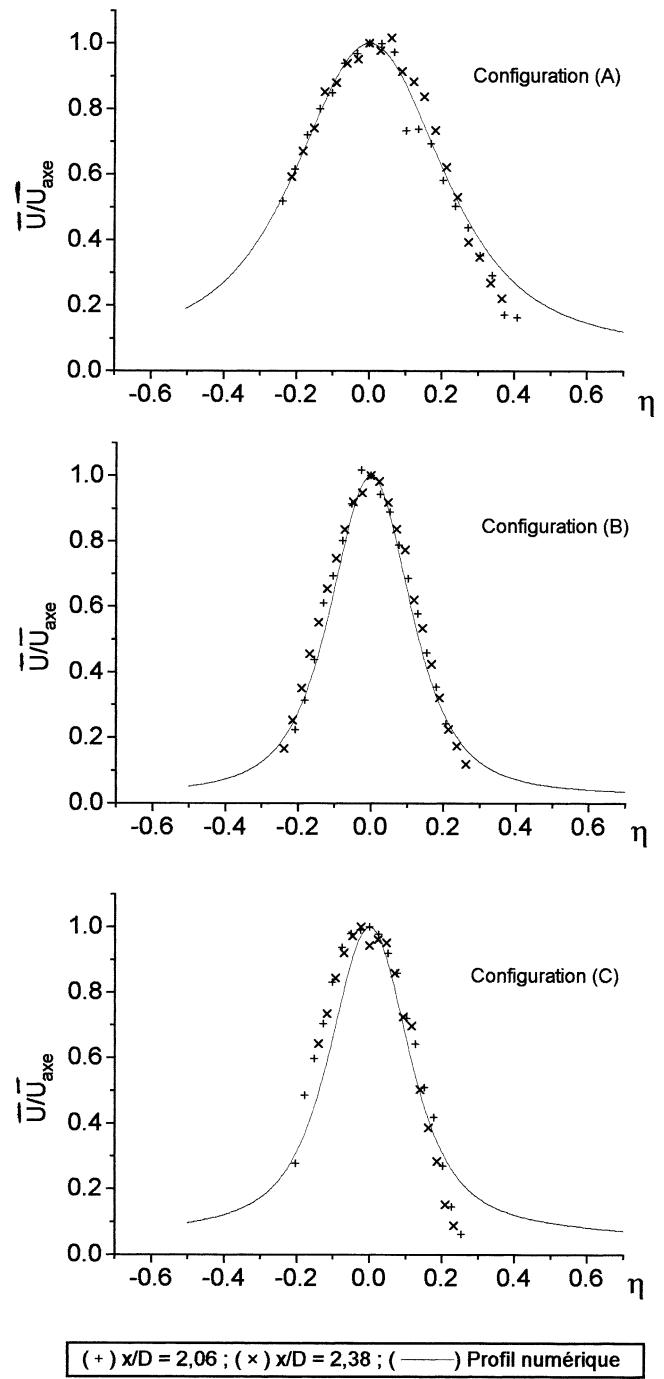


Fig. 8. Vitesse verticale moyenne—milieu stratifié.

Fig. 8. Mean vertical velocity—stratified medium.

$\hat{x} = 2,06$, par la suite, la concentration devient trop faible et sa mesure sur les bords du panache devient très difficile. Une assez bonne concordance entre la théorie et l'expérience a été observée pour les configurations (B) et (C). Pour la configuration (A), la concordance a été moins bonne et on pense que cette différence pourrait provenir de la valeur choisie pour le nombre de Prandtl turbulent.

Dans le cas des panaches turbulents à symétrie axiale, les mesures expérimentales du nombre de Prandtl turbulent sont

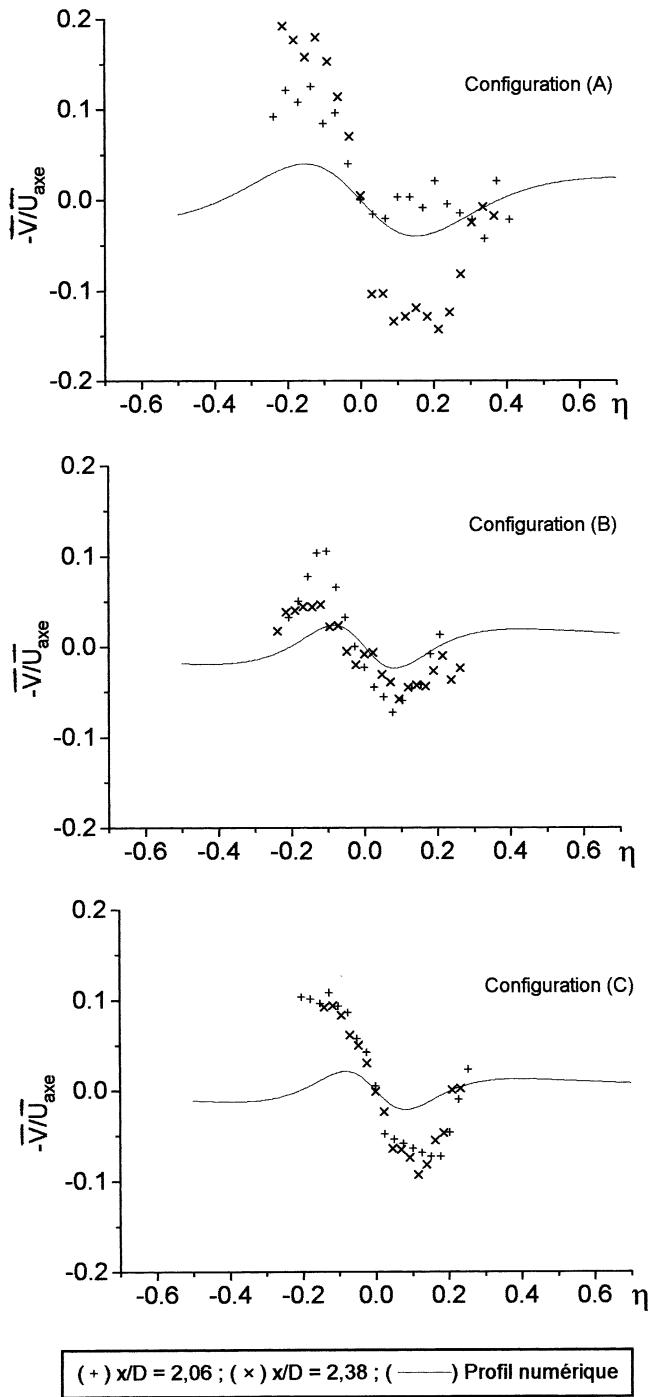


Fig. 9. Vitesse radiale moyenne—milieu stratifié.

Fig. 9. Mean radial velocity—stratified medium.

très rares et permettent seulement d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de sa valeur. Parmi ces travaux, on peut citer ceux de Yih [42] qui a choisi $Pr_t = 1,1$ et ceux de Shabbir et George [41] qui ont trouvé que ce nombre varie entre 0,7 et 1,0.

Par la suite, le modèle a été testé avec un nombre de Prandtl turbulent plus fort. Les résultats numériques obtenus pour la configuration (A) avec $Pr_t = 1,5$, sont très proches

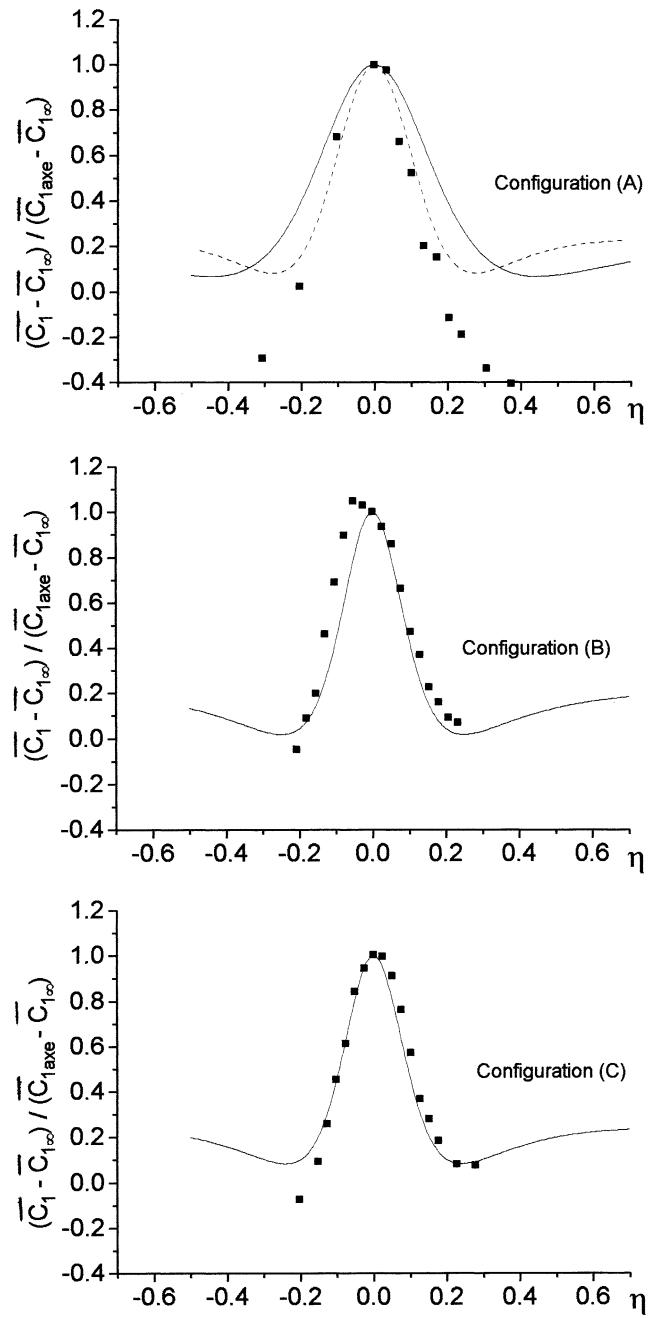


Fig. 10. Concentration moyenne—milieu stratifié.

Fig. 10. Mean concentration—stratified medium.

de l'expérience au coeur de l'écoulement, par contre, sur les bords de celui-ci, les valeurs expérimentales sont inférieures à celles du modèle. Cette différence pourrait être due d'une part, au fait que l'écoulement est très faible (donc plus perturbé) et d'autre part, à l'hypothèse qui suppose l'existence d'une stratification dans tout le milieu ambiant. La collision de l'écoulement dans la petite zone à forte

stratification, donne lieu à un phénomène de mélange plus accentué d'où une concentration en hélium plus faible.

6. Conclusion

L'étude analytique du panache turbulent évoluant en milieu stratifié a permis de dégager les conditions d'affinité de l'écoulement, qui sont à la fois valables pour un panache thermique constitué d'air chaud et pour un panache de gaz léger. Ces dernières ont été vérifiées expérimentalement pour un panache d'hélium, et ont montré que l'évolution axiale de la vitesse et de la concentration obéit, dans ce cas, à de nouvelles lois affines dépendant de la stratification du milieu ambiant. Cette affinité a également été observée pour le champ fluctuant, concernant notamment la composante verticale de la vitesse, et elle est plus lentement atteinte par la composante radiale.

A partir d'un modèle numérique simple, on a observé que dans le domaine d'étude, une diminution de la valeur absolue du coefficient C_s^* lié à la stratification provoque une forte diminution de l'écart de température alors qu'elle n'a pratiquement pas d'influence sur les profils dynamiques. De même, une diminution de la valeur absolue de la constante n provoque une forte augmentation de la vitesse verticale et une faible augmentation de l'écart de température. Lorsque n passe de la valeur $-0,55$ à -1 , le rapport $-v/u_{\text{axe}}$ en $\eta = 0,1$ est pratiquement multiplié par six.

Les résultats du modèle obtenus en milieu stratifié pour trois configurations d'écoulement ont montré une bonne concordance entre la théorie et l'expérience surtout pour la composante verticale de la vitesse. Les profils numériques de la vitesse horizontale gardent la même allure que les courbes expérimentales, cependant l'amplitude semble être sous estimée par le modèle. Ceci est probablement dû au fait que les mesures ont été effectuées pour une stratification brutale du milieu ambiant augmentant ainsi le phénomène d'impact. Les profils de la concentration moyenne ont montré une assez bonne concordance entre la théorie et l'expérience pour les configurations (B) et (C). Pour la configuration (A), la concordance a été améliorée en augmentant la valeur du nombre de Prandtl turbulent.

D'une façon générale, la modélisation simple ici proposée, donne des résultats assez satisfaisants, cependant, pour améliorer le modèle, l'investigation expérimentale peut être complétée notamment par la mesure des corrélations $\overline{u'v'}$, $\overline{u'\tau'}$ et $\overline{v'\tau'}$.

Abridged English version

Investigation of the self-similarity of a turbulent plume evolving in a stratified medium

The discharge of a buoyant plume into a stratified environment is a phenomenon that often occurs in nature and in industrial surroundings. Lakes, rivers, and ponds are

frequently stably stratified, with the density increasing with depth. At the early stages of fire growth in an enclosed region, the heat input due to the fire generally results in the establishment of a hot upper layer with low density above a cooler and heavier bottom layer.

This paper concerns a numerical and analytical investigation of the self-similarity of turbulent plumes evolving in a stratified medium. The analytical investigation allowed us to bring out the self-similarity conditions of the flow. The laws obtained are as valid for the case of a plume of warm air as for light gas and were verified experimentally in the case of a helium plume. The ambient stratification was obtained by placing a box at a height of about two nozzle diameters above the source (Fig. 2) [34]. In the area near the source, the weak density flow is controlled by the initial conditions in a homogeneous air density ambient medium. Above, at about two nozzle diameters from the source is a zone fed by a mixture of helium and entrained air whose concentration is fairly uniform and varies with the flow strength. Between these two zones that have different uniform densities, we find a zone with a strong gradient of density.

Here, we focus on this last zone where the ambient medium is density stratified.

Experiments [35,36], have been carried out for three configurations, corresponding to different experimental conditions in which the buoyancy force in the flow and the stratification intensity have been varied (Table 1).

The axial evolution of the mean velocity and concentration do not follow the classical laws, but follow new self-similarity laws that depend on the stratification of the medium. Self-similarity was even observed for the turbulent field, especially for the vertical velocity component while it was reached more slowly by the radial component.

A numerical model was proposed for the prediction of the mean fields. The influence of the different coefficients of the model on the progressing of the flow was investigated. The model showed that an increase of the constant Ka , which corresponds to an increase of the mixing length, gives broader heat and velocity profiles and a more crushed flow. An increase of the turbulent Prandtl number (or turbulent Schmidt number) causes a decrease of the temperature near the heart of the flow, while the velocity does not vary in this zone.

We remarked also that a decrease of the absolute value of the coefficient C_s^* related to the stratification of the media causes a strong decrease of the temperature excess while it has no influence on the dynamic profiles. A decrease of the absolute value of the constant n creates a strong increase of the vertical velocity and a small increase of temperature. When n varies from the value of $-0,55$ to -1 , the dimensionless radial velocity $-v/u_{\text{axe}}$ at the point $\eta = 0,1$ is approximately increased by a factor of six.

The model was first tested in a homogeneous medium and the numerical results were found to be in close agreement with the experimental studies of Shabbir and George [41]. For the stratified media the results were compared to our

three experimental configurations. Good agreement between theory and experiments was observed for the vertical velocity profiles. The shape of the radial velocity profiles was in agreement with experiments, but the amplitude of the radial velocity was under-estimated. We think that this discordance is due to the strong impinging of the flow at the interface.

The concentration profiles showed good agreement between theory and experiments for the configurations (B) and (C), for the configuration (A) the results were improved by increasing the turbulent Prandtl number.

Références

- [1] B.R. Morton, G. Taylor, J.S. Turner, Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, *Proc. Roy. Soc. A* 234 (1956) 1–23.
- [2] W.D. Baines, Entrainment by a plume or jet at a density interface, *J. Fluid Mech.* 68 (1975) 309–320.
- [3] W.D. Baines, Turbulent buoyant plumes, *J. Fluid Mech.* (1976) 235–250.
- [4] J.A. Rockett, Fire induced gas flow in an enclosure, *Combust. Sci. Technol.* 12 (1976) 165–175.
- [5] E.J. List, Turbulent jets and plumes, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 14 (1982) 189–212.
- [6] S.S.S. Cardoso, A.W. Woods, Mixing by a turbulent plume in a confined stratified region, *J. Fluid Mech.* 250 (1993) 277–305.
- [7] R.E. Breidenthal, Entrainment and mixing in stratified flows, *Appl. Mech. Rev.* 47 (1994) 108–112.
- [8] G.M. Makhviladze, J.P. Roberts, S.E. Yakush, Turbulent buoyant thermal in a density stratified atmosphere, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 39 (1996) 1453–1462.
- [9] P.F. Linden, P. Cooper, Multiple sources of buoyancy in a naturally ventilated enclosure, *J. Fluid Mech.* 311 (1996) 177–192.
- [10] B.R. Morton, Forced plumes, *J. Fluid Mech.* 5 (1959) 151–163.
- [11] J.S. Turner, Jets and plumes with negative or reversing buoyancy, *J. Fluid Mech.* 26 (1966) 779–792.
- [12] K. Kapoor, Y. Jaluria, Penetrative convection of a plane turbulent wall jet in a two-layer thermally stable environment: A problem in enclosure fires, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 36 (1993) 155–167.
- [13] L.J. Bloomfield, R.C. Kerr, Turbulent fountains in a stratified fluid, *J. Fluid Mech.* 358 (1998) 335–356.
- [14] L.J. Bloomfield, R.C. Kerr, Turbulent fountains in a confined stratified environment, *J. Fluid Mech.* 389 (1999) 27–54.
- [15] W. Lin, S.W. Armfield, Direct simulation of weak axisymmetric fountains in a homogeneous fluid, *J. Fluid Mech.* 403 (2000) 67–88.
- [16] A.R. Tenner, B. Gebhart, Laminar and axisymmetric vertical jets in a stably stratified environment, *Heat Mass Transfer* 14 (1971) 2051–2062.
- [17] K.E. Torrance, Natural convection in thermally stratified enclosures with localized heating from below, *J. Fluid Mech.* 95 (1979) 477–495.
- [18] R.A. Wirtz, C.M. Chiu, Laminar thermal plume rise in a thermally stratified environment, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 17 (1974) 323–329.
- [19] Y. Jaluria, K. Himasekhar, Buoyancy-induced two-dimensional vertical flows in a thermally stratified environment, *Computer Fluids* 11 (1983) 39–49.
- [20] J. Srinivasan, D. Angirasa, Laminar axisymmetric multicomponent buoyant plumes in a thermally stratified medium, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 33 (1990) 1751–1757.
- [21] W.P. Jones, B.E. Launder, The prediction of laminarisation with a two-equation model of turbulence, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 5 (1972) 301–314.
- [22] B.E. Launder, G.J. Reece, W. Rodi, Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, *J. Fluid Mech.* 68 (1975) 537–566.
- [23] W. Rodi, A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses, *Mech. Fluid* 56 (1976) 219–221.
- [24] O. Zeman, J.L. Lumley, Modeling buoyancy driven mixed layers, *J. Atmos. Sci.* 33 (1976) 1974–1988.
- [25] E. Ruffin, R. Schiestel, F. Anselmet, M. Amielh, L. Fulachier, Investigation of characteristic scales in variable density turbulent jets using a second-order model, *Phys. Fluids* 6 (1994) 2785–2799.
- [26] H. Sanders, B. Sarh, I. Gokalp, Étude numérique des jets turbulents à température élevée, *Rev. Gén. Therm.* 35 (1996) 232–242.
- [27] D.B. Spalding, N. Afgan, *Heat Transfert and Turbulent Buoyant Convection*, Vol. 1, Series in Thermal and Fluids Engineering, McGraw-Hill, New York, 1977.
- [28] M. Brahimi, M. Lamour, Doan-kim-son, Champs moyens et fluctuants des panaches thermiques isolés ou en interaction, *Rev. Gén. Therm. Fr.* 315–316 (1988) 236–243.
- [29] P.N. Papanicolaou, E.J. List, Investigations of round vertical turbulent buoyant jets, *J. Fluid Mech.* 195 (1988) 341–391.
- [30] Z. Dai, L.K. Tseng, G.M. Faeth, Velocity statistics of round, fully developed, buoyant turbulent plumes, *J. Heat Transfer* 117 (1995) 138–145.
- [31] B. Guillou, Etude numérique et expérimentale de la structure turbulente d'un panache pur à symétrie axiale, Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Poitiers, 1984.
- [32] C.J. Chen, W. Rodi, *Vertical Turbulent Buoyant Jets. A Review of Experimental Data*, Pergamon Press, London, 1980.
- [33] P. Chassaing, H.H.A. Minh, *Turbulence; Introduction à son analyse physique et sa modélisation mathématique*, Cours de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, 1977.
- [34] L. Dehmani, Doan-kim-son, C. Rey, Analyse spectrale du champ dynamique d'un panache turbulent rencontrant un milieu fortement stratifié, *Internat. Comm. Heat Mass Transfer* 23 (1996) 435–449.
- [35] L. Dehmani, Doan-kim-son, L. Gbahoue, Turbulent structure of an axisymmetric plume penetrating a strong density stratification, *Internat. J. Heat Fluid Flow* 17 (1996) 452–459.
- [36] L. Dehmani, Doan-kim-son, L. Gbahoue, F.X. Rongere, Influence of a strong density stratification on the entrainment of a turbulent axisymmetric plume, *Experiments in Fluids* 21 (1996) 170–180.
- [37] B. Guillou, M. Brahimi, Doan-kim-son, Structure turbulente d'un panache thermique. Aspect dynamique, *J. Mécanique Théorique Appl.* 5 (1986) 371–401.
- [38] Y. Jaluria, *Natural Convection, Heat and Mass Transfer*, Pergamon Press, London, 1980.
- [39] J.P. Bonnet, J. Coirier, Cours A.E.A de l'E.N.S.M.A, Poitiers, 1985.
- [40] F. Tamanini, An improved version of the $k-\varepsilon-g$ model of turbulence and its application to axisymmetric forced and buoyancy jets, F.M.R.C. Technical Report, Massachusetts, 1977.
- [41] A. Shabbir, W.K. George, Experiments on a round turbulent buoyant plume, *J. Fluid Mech.* 275 (1994) 1–32.
- [42] C.S. Yih, Turbulent buoyant plumes, *Phys. Fluids* 20 (1977) 1234–1237.